

III.1. INTRODUCTION :

La plupart des systèmes physiques (procédés) qui nous entourent sont non linéaires. Bien souvent, ces non linéarités sont faibles ou ne sont pas visibles sur la plage d'opérations de ces procédés. Le souci constant d'améliorer les performances des systèmes commandés conduit à des modélisations de plus en plus précises qui permettent de répondre sur une plus large plage d'opérations. C'est à ce moment que les non linéarités se font sentir et rendent les outils d'analyse et ou de synthèse des lois de commande, utilisés dans le domaine linéaire, caduques et absolument incapables de rendre compte de certains phénomènes. C'est pourquoi, depuis quelques années, beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Le backstepping fait partie de ces nouvelles méthodes de commande [7]. Cette approche consiste à trouver une fonction de Lyapunov qui permet de déduire une loi de commande pour le système tout en assurant la stabilité globale de commande.

Ce chapitre présente, dans un premier temps, une brève introduction sur les notions théoriques de stabilité des systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte et, dans un deuxième temps, il introduit la commande par backstepping de la MAS basée sur le principe du chapitre se termine par des simulations du système en boucle fermée dans les différentes situations dans lesquelles peut évoluer.

III.2. GÉNÉRALITÉ SUR LA TECHNIQUE DU BACKSTEPPING :

Le backstepping a été développé par Kanellakopoulos et inspiré par les travaux de Feurer & Morse d'une part et Kokotovic & Sussmann. D'autre part elle offre une méthode systématique pour effectuer le design d'un contrôleur pour Les systèmes non linéaires. L'idée consiste à calculer une loi de commande afin de garantir que la dérivée d'une certaine fonction (de Lyapunov) soit définie positive et que se dérivée soit toujours négative. La méthode consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. À la dernière étape, la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation [8].

III.3. NOTION DE BASES :

Cette section présente quelques notions de bases nécessaires à la compréhension des subtilités de la théorie du backstepping [9].

III.3.1. Systèmes non linéaires :

De façon générale, les systèmes physiques représentés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants sont appelés systèmes linéaires. L'hypothèse de linéarité équivaut au principe de superposition. Les systèmes non linéaires, par opposition aux systèmes linéaires, sont des systèmes physiques qui ne sont pas régis par des équations linéaires. Autrement dit, le principe de superposition ne peut pas leur être appliqué.

Les systèmes non linéaires peuvent être le lieu de plusieurs phénomènes. Par exemple, ils peuvent converger, en régime permanent, à différents points d'équilibre, contrairement aux systèmes linéaires, qui n'en possèdent qu'un seul. Cependant, bien d'autres phénomènes caractérisent les systèmes non linéaires [8]. Quelques différences vont être introduites dans les sous sections suivantes.

III.3.2. Equilibre :

Physiquement, un système est en équilibre lorsqu'il conserve son état en absence de forces externes. Mathématiquement, cela équivaut à dire que la dérivée \dot{x} de son vecteur d'état est nulle. Pour un système :

$$\dot{x} = \varphi(x) \quad (\text{III.1})$$

L'état (ou les états) d'équilibre x_e , est la solution (sont les solutions) de l'équation algébrique $\varphi(x) = 0$

Pour les systèmes linéaires, $\varphi(x) = A.x$ ce qui implique que $x = 0$ est un point d'équilibre pour tous les systèmes linéaires. Deux cas différents peuvent survenir, soit A est régulière, alors que l'origine est le seul point d'équilibre. Si A est singulière, ce qui définit un sous-espace où $x.A = 0$ alors il existe une région d'équilibre. Pour les systèmes non linéaires, la solution n'est pas aussi évidente et l'équilibre ne se trouve pas toujours à l'origine. Les régions d'équilibres peuvent être constituées de domaines continus ou de points isolés et/ou la combinaison des deux.

III.3.3. Plan de phase :

Pour bien comprendre le comportement d'un système non linéaire, on a recouru à une représentation des ses trajectoires dans l'espace de phase comme montre la figure(III.1). Ces trajectoires sont un ensemble de courbes qui représentent l'évolution de l'état du système dans le temps. Cette représentation doit toutefois passer par la résolution de l'équation différentielle (III.1), ce qui n'est pas toujours facile. Cependant, les techniques basées sur la deuxième méthode de Lyapunov contournent ce problème. Cette méthode sera montrée dans ce chapitre.

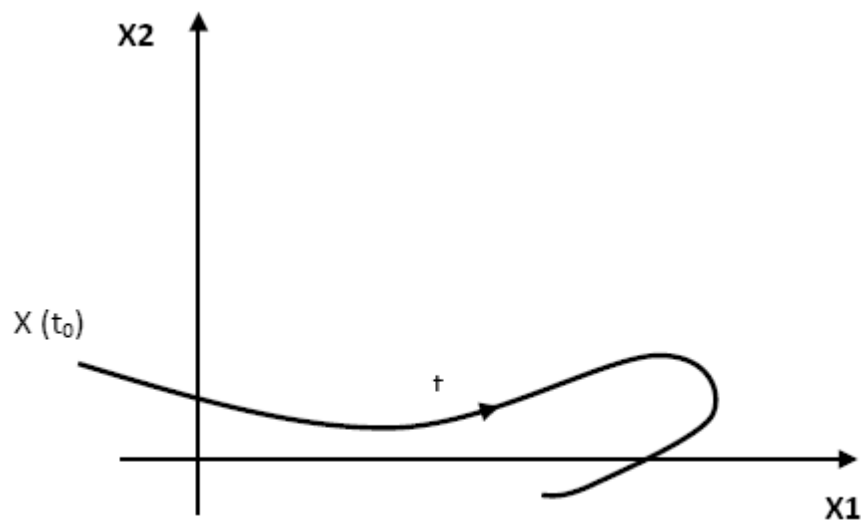


Figure (III.1) : Trajectoire d'un système dans le plan de phase.

III.3.4. Stabilité :

De façon générale, on dit qu'un système est stable s'il, déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y revenir ; instable, s'il tend à s'en écarter davantage. Lyapunov fournit une explication un peu plus mathématique de la stabilité [10].

Prenons comme exemple un système dont l'état est défini par le vecteur x qui possède la position d'équilibre x_e . Écarté de sa position d'équilibre et abandonné à lui-même au temps $t = t_0$ avec les conditions initiales $x(t_0)$, le système aura comme état $x(t)$. La position d'équilibre du système est stable voir figure (III.2) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x(t_0) - x_e\|^2 < \sigma \quad (III.2)$$

Et qu'après un certain temps t , et pour toutes les valeurs $t > 0$, la relation suivante est vérifiée

$$\|x(t_0) - x_e\|^2 < \varepsilon \quad (\text{III.3})$$

Dans le cas contraire l'équilibre est instable. Il n'est pas nécessaire que l'état $x(t)$ tende vers x_e , lorsque t augmente indéfiniment, pour que le système soit stable. Si l'état tend effectivement vers x_e , le système est asymptotiquement stable. Dans le cas où les états n'atteignent pas x_e , mais qu'ils restent à l'intérieur d'un certain ε , alors le système a une stabilité simple (figure(III.2)).

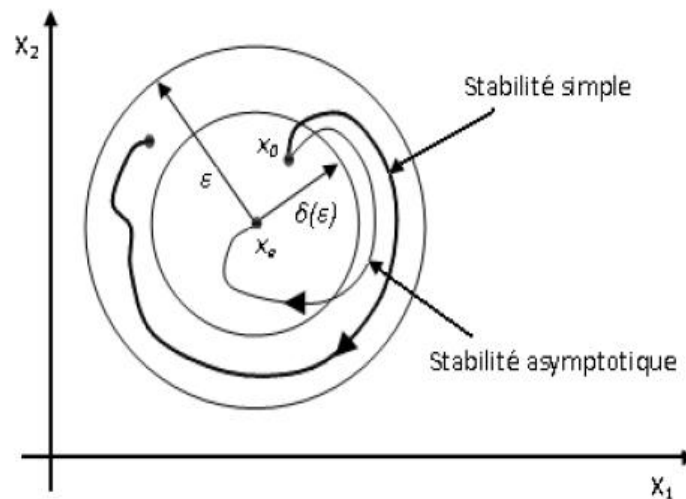


Figure (III.2): Types de stabilité selon Lyapunov.

III.4. MÉTHODES DE LYAPUNOV :

Les faibles non-linéarités dans un système à commander sont, la plupart du temps, traitées comme des perturbations affectant un modèle linéaire du système. Toutes les théories, qui ont été développées depuis plusieurs années et qui sont bien connues des systèmes linéaires sont utilisées. Malheureusement, ces non-linéarités ne peuvent pas toujours être mises de côté et il faut alors utiliser d'autres méthodes [11].

Il y a deux approches possibles pour la commande d'un système non linéaire. La première vise à linéariser le système à commander, afin de profiter des techniques des modèles linéaires. Cette linéarisation est réalisée, moyennant des approximations ou des transformations géométriques dans l'espace de phase. Le système linéarisé est ensuite traité avec la théorie des systèmes linéaires.

La deuxième approche consiste à trouver une Fonction de Commande de Lyapunov (fcl) garantissant certaines performances pour le système en boucle fermée. De telles fonctions

peuvent être très difficiles à trouver pour un système non linéaire d'ordre élevé. C'est là qu'entre en jeu la technique du backstepping qui permet de réduire cette complexité.

Toutefois, avant d'introduire le backstepping, les deux méthodes d'analyse des systèmes non linéaires, fournies par Lyapunov, vont être brièvement décrites. Une attention particulière sera portée sur la deuxième méthode de Lyapunov qui fournit un outil très puissant pour tester et trouver des conditions suffisantes à la stabilité des systèmes dynamiques, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles les décrivant [11].

III.4.1. Première méthode de Lyapunov :

Le théorème de stabilité locale de Lyapunov, connu sous le nom de première méthode, permet de se prononcer sur la linéarisation d'une dynamique autour d'un point d'équilibre. Cette méthode apporte une validité théorique à la technique de linéarisation. Elle mentionne que si le système linéaire est asymptotiquement stable, alors il y a stabilité asymptotique. Dans le cas où le système linéarisé est instable, il y a instabilité. Par contre si celui-ci est stable sans pour autant l'être asymptotiquement, alors il est impossible de se prononcer sur la stabilité.

Ce théorème est d'une importance limitée, car il ne permet d'étudier que la stabilité d'un point singulier (stabilité locale) et ne donne aucune information sur le domaine de stabilité (stabilité globale). De plus, dû aux approximations du premier degré (linéarisation), il n'est pas possible de tenir compte de tous les types de phénomènes non-linéaires (organe avec zone morte, plus ou moins, ...) [9].

III.4.2. Deuxième méthode de Lyapunov :

Cette méthode est basée sur le concept d'énergie dans un système. Pour un système physique, l'énergie est une fonction définie positive de son état. Dans un système conservatif, l'énergie reste constante; pour un système dissipatif, elle décroît. Pour ces deux cas, le système est stable. Si l'énergie croît, le système est instable [11].

L'idée de cette méthode est d'analyser la stabilité du système, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles non linéaires le régissant. Il suffit simplement d'étudier les variations (signe de la dérivée) de l'énergie (ou une fonction qui lui est équivalente) le long de la trajectoire du système (figures III.3). Les théorèmes suivants, qui permettent de se prononcer sur la stabilité (ou instabilité) d'un système, sont fournis par Lyapunov (1966) [9].

Théorème 1: Stabilité asymptotique

S'il est possible de trouver une fonction $V(x)$ de signe défini (avec $V(0) = 0$), dans un domaine D comprenant la position d'équilibre et dont la dérivée totale par rapport au temps \dot{V} soit définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre sera asymptotiquement stable dans ce domaine.

Théorème 2: Stabilité simple

S'il est possible de trouver une fonction V de signe défini dans un domaine D et dont la dérivée totale \dot{V} soit semi-définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre est (Simplement) stable dans ce domaine (c'est-à-dire stable non asymptotiquement), voir figure (III.2).

Théorème 3: Instabilité

S'il est possible de trouver une fonction V dont la dérivée est de signe défini dans un domaine D comprenant l'origine et que V soit définie de même signe que \dot{V} , ou indéfinie en signe, l'équilibre est instable.

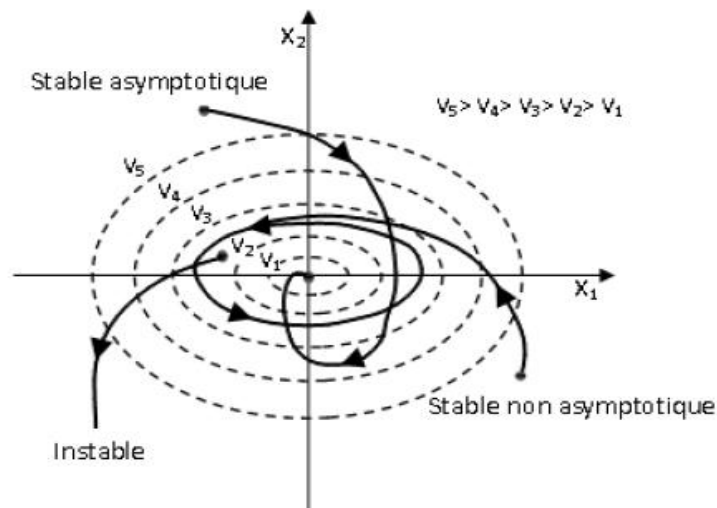


Figure (III.3) : Contours à énergie constante dans le plan de phase.

Contrairement à la première méthode, la deuxième méthode donne plus d'information à niveau de la stabilité. Elle a l'avantage de ne pas se limiter à la prédiction des points d'équilibre, mais bien d'une région d'attraction au tour de ces points d'équilibre [11]. Ces théorèmes présentent une condition suffisante à la stabilité. Pour l'étude de la stabilité d'un système caractérisé par un vecteur d'état x , la méthode directe de Lyapunov consiste, alors, à chercher une fonction $V(x)$ (représentative de l'énergie) de signe défini qui se prête à l'application de l'un des théorèmes cités précédemment. Il n'y a aucune méthode qui permet de trouver directement une

fonction de Lyapunov pour un système donné. Néanmoins, il existe des approches qui conduisent, en général, à des résultats acceptables [9]. Voici quelques exemples de fonction de Lyapunov :

- Fonction quadratique

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x \quad (\text{III.4})$$

- Fonction quadratique plus intégrale

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x + \int_0^t \varphi(u) du \quad (\text{III.5})$$

Avec φ assujettie à certaines contraintes.

Cependant, des inconvénients et des limites existent toujours : L'élaboration d'une fonction de Lyapunov impose un modèle mathématique simplifié et peu réaliste. Les résultats des méthodes directes sont conservatifs : on ne peut rien affirmer quant à la stabilité en dehors du Domaine estimé [10].

Définition

On peut dire que la fonction scalaire $V(x)$:

- Définit positive si $V(0) = 0$ et $V(x) > 0, x \neq 0$
- Semi définit positive si $V(0) > 0$ et $V(x) \geq 0, x \neq 0$
- Définit négative si $-V(x)$ définit positive.
- Semi définit négative si $-V(x)$ Semi définit positive.
- Sans borne radiale si $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$

Théorème (Lasalle-Yoshizawa)

On Considère le système

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (\text{III.6})$$

Soit $x_e = 0$ point d'équilibre du système (III.6), et soit $V(x)$ une fonction scalaire différentielle continu sachant que :

- $V(x)$ Définit positive.
- $V(x)$ Sans borne radiale.

- $\dot{V}(x) = V_x(x)f(x) \leq -W$ Avec $W(x)$ semi défini positive.

Toute solution de (III.6) satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0$$

Si $W(x)$ Défini positive alors le point d'équilibre $x_e = 0$ possède une stabilité asymptotique Globale.

Exemple : 1

On considère le système :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3$$

Si on choisit: $V(x) = \alpha \cdot x_1^4 + x_2^2$ on obtient :

$$\dot{V}(x) = (4\alpha - 2) \cdot x_1^3 x_2 - 2x_2^2$$

Le choix de $\alpha=1/2$ nous donne la nouvelle expression de \dot{V} avec $\dot{V}(x) = -2x_2^2 \leq 0$ évidemment on ne peut pas utiliser le théorème (III.4) comme il est parce que \dot{V} est Semi défini négative.

III.5. COMMANDE BASÉE SUR LES FONCTIONS DE LYAPUNOV :

Introduite au départ comme un outil d'analyse, la méthode (deuxième) de Lyapunov s'est très vite avérée fort utile dans les problèmes de design. L'idée consiste à calculer une loi de commande, afin de garantir que la dérivée d'une certaine fonction de Lyapunov définie positive, et bien choisie, soit non positive. Cette propriété doit être vérifiée le long de toutes les trajectoires possibles du système en boucle fermée. Ces méthodes conviennent mieux aux systèmes non linéaires [13]. Les solutions proposées sont spécialement conçues pour ce type de systèmes.

III.5.1. Application au design

Soit le cas du système non linéaire autonome suivant :

$$\dot{x} = \varphi(x, \alpha(x)) \quad (\text{III. 7})$$

Avec $\varphi(0,0) = 0$. Le but est de concevoir une loi de commande $u = \alpha(x)$ tel que l'équilibre

($x_e = 0$) du système résultant en boucle fermée

$$\dot{x} = \varphi(x, \alpha(x))$$

Soit asymptotiquement stable. Pour garantir cette stabilité, un bon choix des fonctions $V(x)$ et $W(x)$ est nécessaire. La commande $u = \alpha(x)$ doit vérifier

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, \alpha(x)) \leq -W(x) \leq 0 \quad (\text{III.8})$$

À cause d'un mauvais choix de $V(x)$ et $W(x)$, une telle commande peut stabiliser le système sans (III.7) pour autant vérifier (III.8). Un système pour lequel un bon choix de ces deux fonctions existe, est dit possédant une Fonction de Commande de Lyapunov (fcl). Pour de tels systèmes l'équilibre est globalement asymptotiquement stabilisable.

Définition : (Fonction de Commande de Lyapunov) –

Une fonction $V : R^n \rightarrow R_+$ définie positive et non bornée radialement est appelée une fonction de commande de Lyapunov (fcl) pour le système (III.7) si

$$\inf_{u \in R} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x) \varphi(x, u) \right\} < 0, \quad \forall x \neq 0$$

Exemple :

Soit à stabiliser l'origine ($x_1 = 0$) du système scalaire

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1)^T \vartheta + \Psi_1(x_1)u \quad (\text{III.9})$$

où φ_1 et ψ_1 sont des fonctions non linéaires, et ϑ est un vecteur de paramètres connus. Pour ce faire, une fcl $V(x_1)$ doit être choisie et une commande u qui annule sa dérivée le long de la trajectoire, doit être calculée. Pour un système scalaire,

$$V(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2$$

représente souvent un bon choix [13]. Sa dérivée le long de la solution de (III.9) donne

$$\dot{V}(x_1) = x_1 \dot{x}_1 = x_1 [\varphi_1(x_1)^T \vartheta + \Psi_1(x_1)u]$$

Un choix judicieux de u rend $\dot{V}(x_1)$ négative et assure la stabilité asymptotique de l'origine du système. Un exemple de commande est donné par le choix de u tel que

$$\varphi_1(x_1)^T \vartheta + \Psi_1(x_1)u = -k_1 x_1, \quad k_1 > 0$$

Ce qui donne

$$u = -\frac{1}{\Psi_1(x_1)} [k_1 x_1 + \varphi_1(x_1)^T \vartheta]$$

La dérivée s'écrit alors

$$\dot{V}(x_1) = -k_1 x_1^2 \leq 0 \quad (\text{III.10})$$

d'où la stabilité asymptotique de l'origine. Le fait que, dans (III.10), V soit semi-définie négative n'implique pas forcément une stabilité simple. L'ensemble des points où la dérivée s'annule ne constitue pas une trajectoire possible du système, puisqu'elle ne s'annule qu'à l'origine. On peut donc, selon le théorème de Barbašin et Krasovskij [13], affirmer la stabilité asymptotique.

Remarque (Choix de la commande)

Le choix de u n'est pas unique. Un bon choix permet de rendre négative la dérivée, sans supprimer les non-linéarités utiles dans le système, ni augmenter inutilement l'effort fourni par l'actionneur [13].

III.5.2. Choix de la fonction de Lyapunov :

Même pour des systèmes simples et en l'absence d'incertitudes, le choix de la fonction de Lyapunov, et de la loi de commande (qui en dépend directement), n'est pas toujours facile. Aucune règle générale n'existe quant au choix d'une telle fonction. Et quand on sait l'influence de ce choix sur le comportement général du système, on comprend l'intérêt qu'a suscité ce problème ces dernières années. Un bon choix de la fonction de Lyapunov permet d'assurer une stabilité dans une large plage de fonctionnement, voire même globale. Différentes approches ont été présentées dans [13], concernant la construction des fonctions de Lyapunov dans le cadre de l'analyse des systèmes simples.

Dans ce qui suit, seront présentées de technique qui réponde aux problèmes que peut poser le choix d'une telle fonction et/ou de la commande, pour des systèmes non linéaires présentant : Un ordre élevé commande par backstepping. Cette méthode, qui sera présentée en détail, offre l'avantage de répondre simultanément à ce problème.

III.6. DESIGN PAR BACKSTEPPING:

Le design d'un contrôleur pour un système non linéaire de la forme :

$$\dot{x} = \varphi(x, \theta, u, t)$$

Où le vecteur d'état x est de dimension élevée, peut souvent s'avérer une tâche difficile, voire impossible. La technique du backstepping offre une méthode systématique pour répondre à ce type de problème. Elle combine la notion de fonction de contrôle de Lyapunov (fcl) avec une procédure récursive de design. Cela permet de surmonter l'obstacle de la dimension et d'exploiter la souplesse de conception dans le cas scalaire pour résoudre les problèmes de commande pour des systèmes d'ordre plus élevé. Ne faisant pas nécessairement appel à la linéarisation, le backstepping permet, quand il y en a, de conserver les non-linéarités utiles qui, souvent, aident à conserver des valeurs finies du vecteur d'état. Cette technique suppose que l'on est en mesure de trouver au moins pour un système scalaire, une loi de commande u et une fonction de contrôle de Lyapunov $V(x)$ qui stabilise son origine. [13].

La méthode consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. À la dernière étape, la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation. Contrairement à la plupart des autres méthodes, le backstepping n'a aucune contrainte au niveau du type de non linéarité. Cependant, le système doit se présenter sous la forme dite paramétrique pure. Les équations d'un tel système sont données par :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1)^T \vartheta + \Psi_1(x_1)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2)^T \vartheta + \Psi_2(x_1, x_2)x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})^T \vartheta + \Psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n \\
 \dot{x}_n &= \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)^T \vartheta + \Psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{III.11}$$

où ϑ est le vecteur de paramètres constants. Les ψ_i et les φ_i sont des fonctions non linéaires connues, avec $\varphi_i(0) = 0$ et $\psi_n(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$

Dans le cas où le système à commander fait partie de la classe plus restrictive des systèmes dits à forme paramétrique stricte ($\psi_i = 1$), les propriétés de poursuite et de régulation obtenues sont globales [13]. Pour les systèmes à forme paramétrique pure, l'étendue de la validité de ces propriétés dépend du domaine de définition des transformations géométriques (difféomorphismes) qui permettent de ramener le système sous la forme stricte. Dans le cas où ce domaine est \mathbb{R}^n , les propriétés sont également globales.

La version de base du backstepping concerne la commande par retour d'état, en l'absence d'incertitudes. Ce cas très particulier servira à introduire la procédure récursive de design. La robustification du backstepping, qui consiste à l'augmenter de termes d'amortissements non linéaires, sera abordée en suite.

a) Remarque (Simplification):

Pour toutes les méthodes qui seront présentées, la procédure de design restera la même, pour les systèmes d'ordre $n \geq 3$. Afin de simplifier les expressions, les systèmes utilisés seront d'ordre 3. Les résultats généraux (ordre n) seront toutefois donnés. Il faut noter que le nombre des étapes, nécessaires à la construction de la commande, de la fcl et éventuellement de la loi d'adaptation, est égal à l'ordre du système [13].

b) Algorithme de base :

Afin d'illustrer le principe de la méthode du backstepping, on considère le cas des systèmes non linéaires de la forme

$$\dot{x}_1 = \varphi_1^T(x_1)\vartheta + \Psi_1(x_1)x_2 \quad (\text{III. 12})$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_2^T(x_1, x_2)\vartheta + \Psi_2(x_1, x_2)x_3 \quad (\text{III. 13})$$

$$\dot{x}_3 = \varphi_3^T(x_1, x_2, x_3)\vartheta + \Psi_3(x_1, x_2, x_3)u \quad (\text{III. 14})$$

Le vecteur des paramètres ϑ est supposé connu. On désire faire suivre à la sortie $y = x_1$ le signal de référence y_r où \dot{y}_r, \ddot{y}_r et $y_r^{(3)}$, et sont supposées connues et uniformément bornées. Le système étant du troisième ordre, le design s'effectue en trois étapes [13].

Étape 1 :

On considère d'abord l'équation (III.12), où la variable d'état x_2 est traitée comme un commande (fictive !) et l'on définit la première valeur désirée $(x_1)_d = \alpha_0 = y_r$

La première variable d'erreur se définit par :

$$\varepsilon_1 = x_1 - \alpha_0 \quad (\text{III. 15})$$

Avec ces variables, le système (III.12) s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{x}_1 - \dot{\alpha}_0 = \dot{x}_1 = \varphi_1^T\vartheta + \Psi_1x_2 - \dot{\alpha}_0 \quad (\text{III. 16})$$

Pour un tel système, il a été montré (Exemple (III.6)) que la fonction quadratique :

$$V_1(\varepsilon_1) = \frac{1}{2} \varepsilon_1^2$$

Constitue un bon choix de fcl. Sa dérivée, le long de la solution de (III.16), est donnée par :

$$\dot{V}_1 = \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 [\varphi_1^T \vartheta + \Psi_1 x_2 - \dot{\alpha}_0]$$

Un choix judicieux de x_2 rendrait \dot{V}_1 négative et assurerait la stabilité de l'origine du sous-système décrit par (III.16). Prenons comme valeur de x_2 , la fonction α_1 , telle que :

$$\varphi_1^T \vartheta + \Psi_1 \alpha_1 - \dot{\alpha}_0 = -k_1 \varepsilon_1$$

Où $k_1 > 0$ est un paramètre de design. Cela donne :

$$(x_2)_d = \alpha_1 = \frac{1}{\Psi_1} [-k_1 \varepsilon_1 - \varphi_1^T \vartheta + \dot{\alpha}_0] \quad (\text{III. 17})$$

et la dérivée s'écrit :

$$\dot{V}_1 = -k_1 \varepsilon_1^2 \leq 0$$

D'où la stabilité asymptotique de l'origine de (III.16).

Étape 2 :

On considère le sous-système (III.12) - (III.13) et l'on définit la nouvelle variable d'erreur

$$\varepsilon_2 = x_2 - \alpha_1 \quad (\text{III. 18})$$

qui représente l'écart entre la variable d'état x_2 et sa valeur désirée α_1 . À cause du fait que x_2 ne peut être forcée à prendre instantanément une valeur désirée, en l'occurrence α_1 , l'erreur ε_2 n'est pas, instantanément, nulle. Le design dans cette étape consiste, alors, à la forcer à s'annuler avec une certaine dynamique, choisie au préalable.

Les équations du système à commander, dans l'espace $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, s'écrivent

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varphi_1^T \vartheta - \dot{\alpha}_0 + \Psi_1 (\varepsilon_2 + \alpha_1) \quad (\text{III. 19})$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \varphi_2^T \vartheta - \dot{\alpha}_1 + \Psi_2 x_3 \quad (\text{III. 20})$$

Pour lequel on choisit comme fonction de Lyapunov

$$V_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = V_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \quad (\text{III. 21})$$

Cette dernière a pour dérivée, le long de la solution de (III.19) - (III.20)

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \dot{V}_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 \\
&= \varepsilon_1 [\varphi_1^T \vartheta - \dot{\alpha}_0 + \Psi_1(\varepsilon_2 + \alpha_1)] + \varepsilon_2 [\varphi_2^T \vartheta - \dot{\alpha}_1 + \Psi_2 x_3] \\
&= \varepsilon_1 [\varphi_1^T \vartheta - \dot{\alpha}_0 + \Psi_1 \alpha_1] + \varepsilon_2 [\varphi_2^T \vartheta - \dot{\alpha}_1 + \Psi_2 x_3 + \Psi_1 \varepsilon_1] \\
&= -k_1 \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2 [\varphi_2^T \vartheta - \dot{\alpha}_1 + \Psi_2 x_3 + \Psi_1 \varepsilon_1]
\end{aligned}$$

Le choix de la valeur désirée de x_3 devient évident. Ce dernier est donné par :

$$(x_3)_d = \alpha_2 = \frac{1}{\Psi_2} [\dot{\alpha}_1 - \varphi_2^T \vartheta - \Psi_1 \varepsilon_1 - k_2 \varepsilon_2] \quad (\text{III. 22})$$

où $k_2 > 0$, avec $\dot{\alpha}_1$ calculée analytiquement

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \ddot{y}_r} \ddot{y}_r$$

Un tel choix permet de réduire la dérivée à

$$\dot{V}_2 \leq -k_1 \varepsilon_1^2 - k_2 \varepsilon_2^2 \leq 0$$

Ce qui assure la stabilité asymptotique de l'origine de (III.19) - (III.20).

Étape 3 :

Le système (3.12)-(3.14) est maintenant considéré dans sa globalité. La variable d'erreur

$$\varepsilon_3 = x_3 - \alpha_2 \quad (\text{III. 23})$$

est définie, ce qui permet d'écrire les équations du système, dans l'espace des erreurs ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$)

$$\dot{\varepsilon}_1 = [\varphi_1^T \vartheta - \dot{\alpha}_0 + \Psi_1(\varepsilon_2 + \alpha_1)] \quad (\text{III. 24})$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = [\varphi_2^T \vartheta - \dot{\alpha}_1 + \Psi_2(\varepsilon_3 + \alpha_2)] \quad (\text{III. 25})$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = [\varphi_3^T \vartheta - \dot{\alpha}_2 + \Psi_1 u] \quad (\text{III. 26})$$

Avec comme fonction de Lyapunov

$$V_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = V_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_3^2 \quad (\text{III. 27})$$

La dérivée, le long de la solution de (III.24) - (III.26), devient

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= \dot{V}_2 + \varepsilon_3 \dot{\varepsilon}_3 \\
&= -K_1 \varepsilon_1^2 - K_2 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3 [\varphi_3^T \vartheta - \dot{\alpha}_2 + \Psi_3 u + \Psi_2 \varepsilon_2]
\end{aligned}$$

À présent, on est en présence de la vraie commande (qui, contrairement à x_2 et x_3 , peut être instantanément forcée à prendre n'importe quelle valeur désirée -physiquement réalisable-).

Un bon choix de celle-ci est donné par :

$$u = \frac{1}{\Psi_3} [\dot{\alpha}_2 - \varphi_3^T \vartheta - \Psi_2 \varepsilon_2 - k_3 \varepsilon_3] \quad (\text{III. 28})$$

où $k_3 > 0$ et $\dot{\alpha}_2$ est également calculée analytiquement,

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \ddot{y}_r} y_r^{(3)}$$

Avec ce choix, on a

$$V_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \leq -K_1 \varepsilon_1^2 - K_2 \varepsilon_2^2 - K_3 \varepsilon_3^2 \leq 0$$

D'où la stabilité asymptotique de l'origine de (III.24) - (III.26). Ceci se traduit par la stabilité, en boucle fermée, du système originel (III.12)- (III.14) et le réglage à zéro de l'erreur de poursuite $y - y_r$. Les deux principaux objectifs du design sont alors atteints.

Remarque (Paramètres k_i) :

Les paramètres de design k_i , sont directement liés à la position de pôles de la boucle fermée. Leur choix permet de faire un placement des pôles, fixant ainsi la dynamique en régulation de cette boucle [13].

III.7. LES AVANTAGE DE LA COMMANDE BACKSTEPPING :

Les avantages de la technique de backstepping, c'est qu'on peut l'associer à d'autres méthodes de l'automatique moderne dans l'objectif d'améliorer les performances. La commande par mode de glissement non linéaire est l'une des méthodes qui s'associe à la technique de backstepping avec une procédure très simple [14].

Aussi, une autre solution permettant d'améliorer la robustesse de la commande par backstepping et pour être en mesure d'éliminer les erreurs résiduelles, en présence de perturbations à moyenne non nulle, une action intégrale est introduite dans les contrôleurs générés par le backstepping [15].

III.8. APPLICATION A LA MACHINE SYNCHRONE A AIMANTS PERMANENTS :

L'application de la technique de la commande non linéaire par backstepping au modèle est basée sur trois régulateurs, permet de pouvoir commander les courants i_d , i_q et la vitesse ω .

III.8.1. Modèle de la MSAP commandée :

Pour une commande en tension de la MSAP, le modèle complet correspondant dans le repère lié au rotor est obtenu en considérant les vecteurs d'état :

$$\dot{X} = f(x) + B \cdot U + d \cdot C_r \quad (\text{III. 29})$$

x : vecteur d'état choisi pour la modélisation formé de i_d = courant direct, i_q = courant en quadrature et ω_r la vitesse électrique du rotor.

$$X = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T = [i_d \ i_q \ \omega_r]^T$$

$f(x)$: Champs de vecteur définissant la dynamique non linéaire de la machine.

$$B : \text{matrice d'entrée} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U : Vecteur de commande composé des tensions exprimées dans le repère de Park.

$$U = \begin{bmatrix} U_1 = U_d \\ U_2 = U_q \end{bmatrix}$$

C_r : étant le couple de charge inconnu et le vecteur d est donné par :

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Le modèle (III. 29) peut être réécrit d'une façon plus détaillée

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = f_1(x) + b_1 U_1 \\ \dot{X}_2 = f_2(x) + b_2 U_2 \\ \dot{X}_3 = f_3(x) + d_1 C_r \end{cases} \quad (\text{III. 30})$$

Avec l'expression du champs de vecteur $f(x)$ suivante:

$$\begin{cases} f_1(x) = a_1 X_1 + a_2 X_2 X_3 \\ f_2(x) = a_3 X_2 + a_4 X_3 + a_5 X_1 X_3 \\ f_3(x) = a_6 X_2 + a_7 X_3 + a_8 X_1 X_2 \end{cases}$$

Paramètres du modèle :

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{R_s}{L_d} & a_2 &= -\frac{L_q}{L_d} & b_1 &= \frac{1}{L_d} \\ a_3 &= -\frac{R_s}{L_q} & a_4 &= -\frac{\phi}{L_d} & a_5 &= -\frac{L_d}{L_q} \\ a_6 &= \frac{P\phi}{J} & a_7 &= -\frac{f}{J} & a_8 &= \frac{P\phi}{J} (L_d - L_q) \\ b_2 &= -\frac{1}{L_q} & d_1 &= -\frac{1}{J} \end{aligned}$$

Avec :

R_S résistance d'une phase du stator	f coefficient de frottement
L_d inductance dans l'axe directe	J moment d'inertie du rotor
L_q inductance dans l'axe en quadrature	P nombre de paires de pôles
\emptyset flux créé par les aimants au rotor	

III.8.2. Objectif de la commande :

On veut forcer la vitesse de la machine x_3 à suivre sa référence x_3^r et maintenir en même temps le courant direct ($i_d = x_1$) à zéro malgré les perturbations modélisées par C_r

Étape 1:

Commander x_3 par x_2 tel que : $X_3 \rightarrow X_3^r$

Soit la fonction de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} (X_3 - X_3^r)^2 \quad (\text{III. 31})$$

dont la dérivée est :

$$\dot{V}_1 = (X_3 - X_3^r) \cdot (\dot{X}_3 - \dot{X}_3^r) = (X_3 - X_3^r) \cdot \left(\frac{P\emptyset}{J} X_2 - \frac{f}{J} X_3 - \frac{1}{J} C_r - \dot{X}_3^r \right) \quad (\text{III. 32})$$

Si X_2 prend la valeur suivante :

$$X_2^* = \frac{J}{P\emptyset} \left[\frac{f}{J} X_3 - K_3 \cdot (X_3 - X_3^r) + \dot{X}_3^r \right] \quad (\text{III. 33})$$

La dérivée \dot{V}_1 s'écrit alors :

$$\dot{V}_1 = -K_3 \cdot (X_3 - X_3^r)^2 - (X_3 - X_3^r) \cdot \frac{C_r}{J} \text{ dans ce cas on aura si on prendre } K_3 \gg -\frac{C_r}{J}$$

On aura $\dot{V}_1 = -K_3 \cdot (X_3 - X_3^r)^2 < 0$

Ce qui assure la convergence de X_3 vers X_3^r avec une robustesse vis-à-vis de couple de charge.

Étape 2:

Commander (X_1, X_2) par (U_1, U_2) tel que $X_2 \rightarrow X_2^*$ et $X_1 \rightarrow X_1^r = 0$

soit la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (X_3 - X_3^r)^2 + \frac{1}{2} (X_2 - X_2^*)^2 + \frac{1}{2} X_1^2 \quad (\text{III. 34})$$

dont on exprime la dérivée

$$\dot{V} = (X_3 - X_3^r)(\dot{X}_3 - \dot{X}_3^r) + (X_2 - X_2^*) \cdot (\dot{X}_2 - \dot{X}_2^*) + X_1 \cdot \dot{X}_1 \quad (\text{III. 35})$$

a) commander X_1 par U_1 te que $X_1 \rightarrow X_1^r = 0$

Le terme $X_1 \cdot \dot{X}_1$ de la dérivée \dot{V} s'écrit :

$$X_1 \cdot \dot{X}_1 = X_1 \cdot \left(f_1 + \frac{1}{L_d} U_1 \right) \quad (\text{III. 36})$$

Si $U_1 = L_d[-f_1 - K_1 X_1]$ alors ce terme s'écrit : $X_1 \cdot \dot{X}_1 = -K_1 \cdot X_1^2$

Dans ce cas nous avons : $X_1 \cdot \dot{X}_1 = -K_1 \cdot X_1^2 < 0$

b) les termes restants :

$T = t_1 + t_2$ tel que :

$$T = (X_3 - X_3^r)(\dot{X}_3 - \dot{X}_3^r) + (X_2 - X_2^*)(\dot{X}_2 - \dot{X}_2^*) \quad (\text{III. 37})$$

t_1 s'écrit aussi :

$$t_1 = (X_3 - X_3^r) \cdot \left(\frac{P\emptyset}{J} X_2 - \frac{f}{J} X_3 - \frac{1}{J} C_r - \dot{X}_3^r \right)$$

Soit en ajoutant et en soustrayant $\frac{P\emptyset}{J} X_2^*$

$$t_1 = (X_3 - X_3^r) \cdot \left(\frac{P\emptyset}{J} (X_2 - X_2^*) + \frac{P\emptyset}{J} X_2^* - \frac{f}{J} X_3 - \frac{1}{J} C_r - \dot{X}_3^r \right)$$

$$t_1 = \frac{P\emptyset}{J} (X_2 - X_2^*)(X_3 - X_3^r) + (X_3 - X_3^r) \cdot \left(\frac{P\emptyset}{J} X_2^* - \frac{f}{J} X_3 - \frac{1}{J} C_r - \dot{X}_3^r \right)$$

Or d'après (III. 33)

$$\frac{P\emptyset}{J} X_2^* = \left[\frac{f}{J} X_3 - K_3 \cdot (X_3 - X_3^r) + \dot{X}_3^r \right]$$

Ce qui résulte en :

$$t_1 = \frac{P\emptyset}{J} (X_2 - X_2^*)(X_3 - X_3^r) + (X_3 - X_3^r) \cdot \left[-K_3 \cdot (X_3 - X_3^r) - \frac{1}{J} C_r \right]$$

$$t_1 = \frac{P\emptyset}{J} (X_2 - X_2^*)(X_3 - X_3^r) + \dot{V}_1$$

si par ailleurs on choisit

$$U_2 = -L_q \left[-f_2 + X_2^* - K_2 \cdot (X_2 - X_2^*) - \frac{P\emptyset}{J} (X_3 - X_3^r) \right] \quad (\text{III. 38})$$

et sachant que (III. 37)

$$t_2 = (X_2 - X_2^*) \cdot \left(f_2 - \frac{1}{L_q} U_2 - \dot{X}_2^* \right)$$

On aura :

$$t_2 = -K_2 \cdot (X_2 - X_2^*)^2 - \frac{P\emptyset}{J} (X_2 - X_2^*)(X_3 - X_3^r)$$

Finalement, en regroupant les termes on obtient :

$$T = t_1 + t_2$$

$$T = -K_2 \cdot (X_2 - X_2^*)^2 - \frac{P\emptyset}{J} (X_2 - X_2^*)(X_3 - X_3^r) + \frac{P\emptyset}{J} (X_2 - X_2^*)(X_3 - X_3^r) + \dot{V}_1$$

$$T = -K_2 \cdot (X_2 - X_2^*)^2 + \dot{V}_1$$

Tel que : $\dot{V}_1 = -K_3 \cdot (X_3 - X_3^r)^2 < 0$

On aura :

$$T = -K_2 \cdot (X_2 - X_2^*)^2 - K_3 \cdot (X_3 - X_3^r)^2 < 0$$

Ainsi, de ce qui précède, il est claire qu'il suffit de choisir convenablement les différents gains K_{ij} pour assurer la définie-négativité de la dérivée \dot{V} de la fonction de Lyapunov globale V définie par (III.34), et maintenir les performances du système en boucle fermée malgré la présence de couple de charge.

III.8.3. Récapitulation :

La commande par backstepping est résumée dans le tableau suivant:

Objectif	$X_3 = X_3^r$ et $X_1 = 0$; $C_r \neq 0$
Variables intermédiaires	$X_2^* = \frac{J}{P\emptyset} \left[\frac{f}{J} X_3 - K_3. (X_3 - X_3^r) + \dot{X}_3^r \right]$
Paramètres	$K_1; K_2 ; K_3$
Commandes	$U_1 = L_d[-f_1 - K_1 X_1]$ $U_2 = -L_q \left[-f_2 + X_2^* - K_2. (X_2 - X_2^*) - \frac{P\emptyset}{J} (X_3 - X_3^r) \right]$

Tableau III.1: commande par backstepping

Schéma de bloc :

Le schéma de bloc du système de commande par backstepping-MSAP est représenté par la Figure (III.4) suivant :

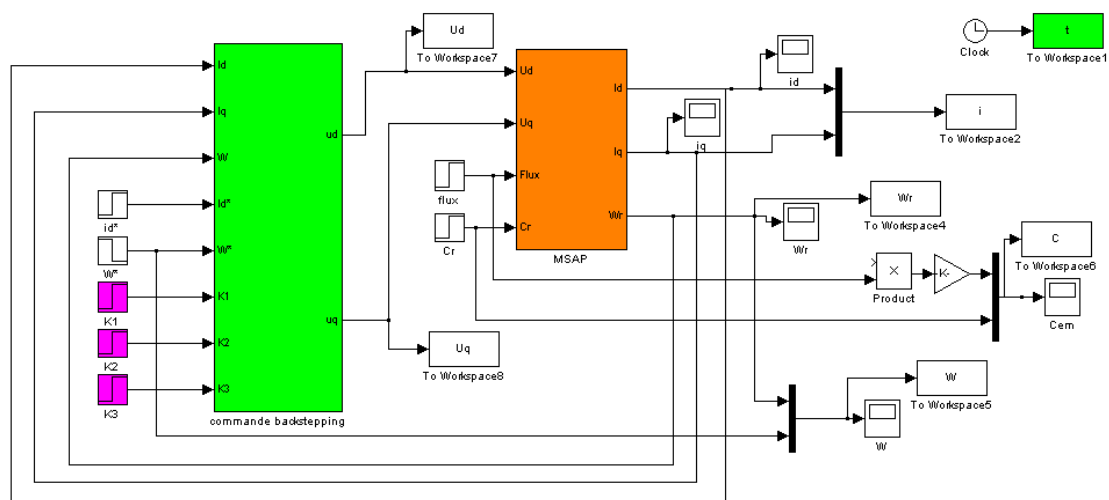


Figure (III.4) : Schéma de bloc de l'association commande par backstepping-MSAP

III.8.4. Résultats de simulation de commande par backstepping l'association de la MSAP :

a) Test de la commande à vide :

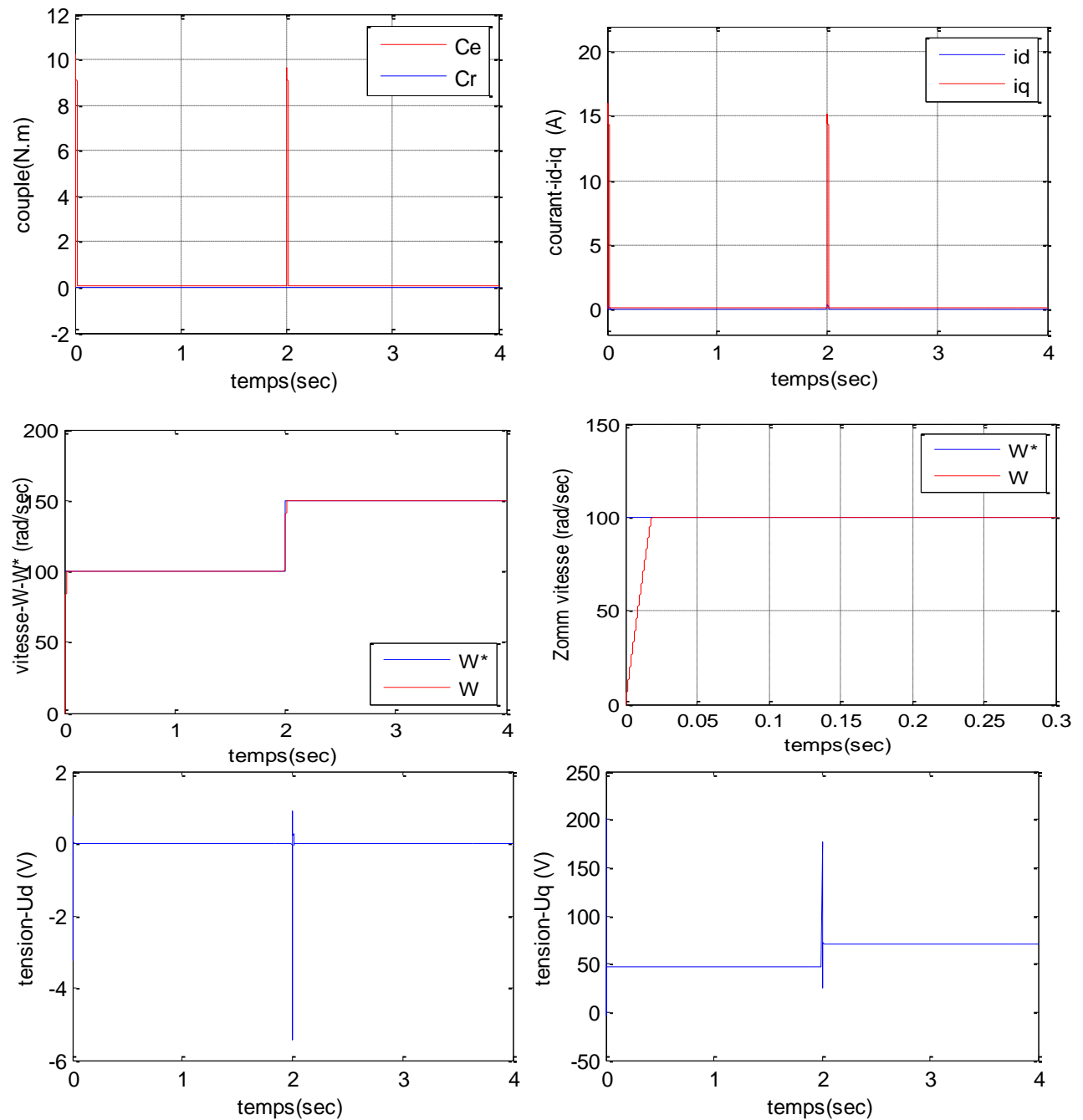


Figure (III.5.a) Test de la commande à vide

b) Test de la commande avec une charge nominal :

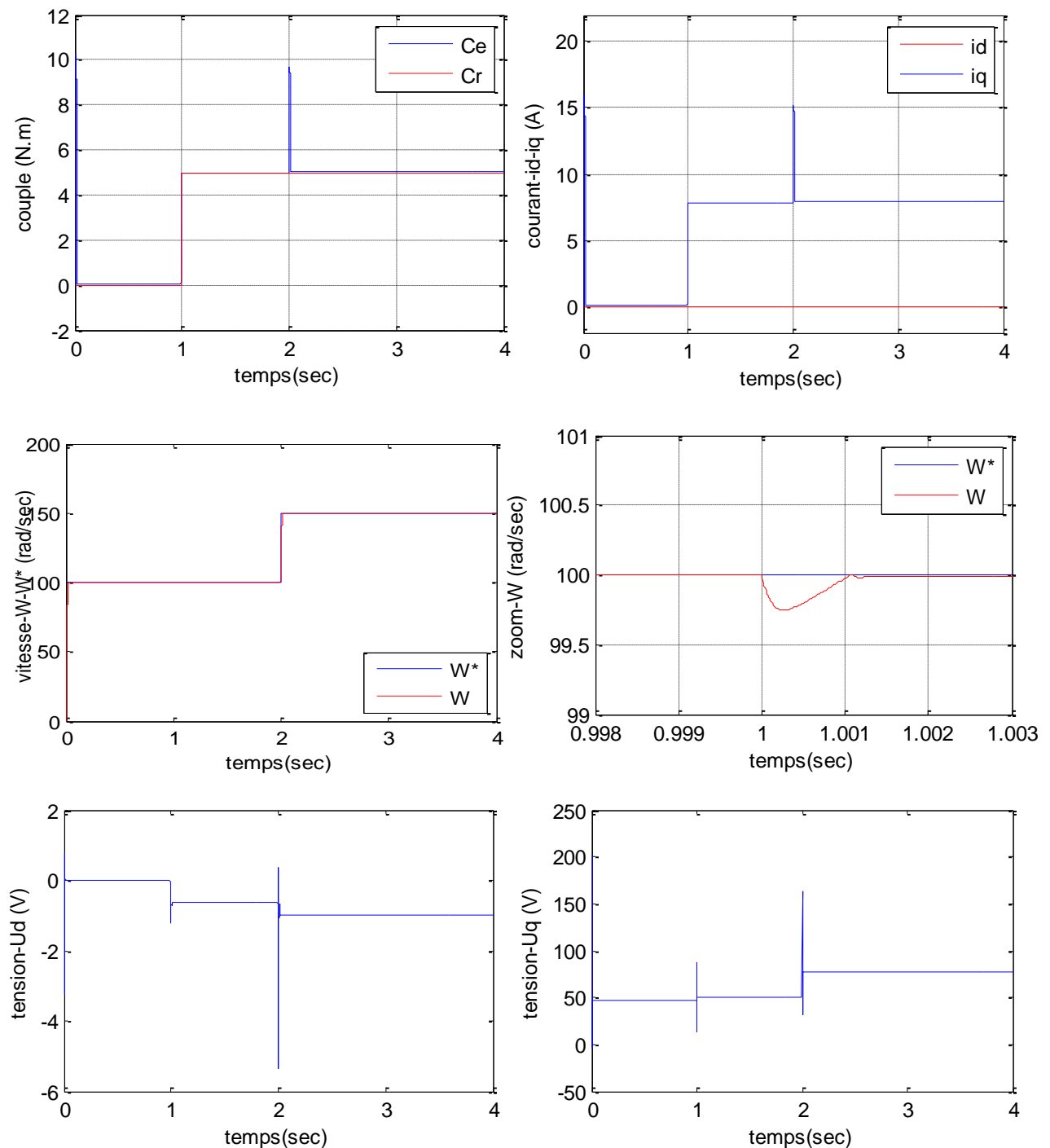


Figure (III.5.b) Test de la commande avec une charge nominal

c) Test de la commande à l'inversion de la vitesse:

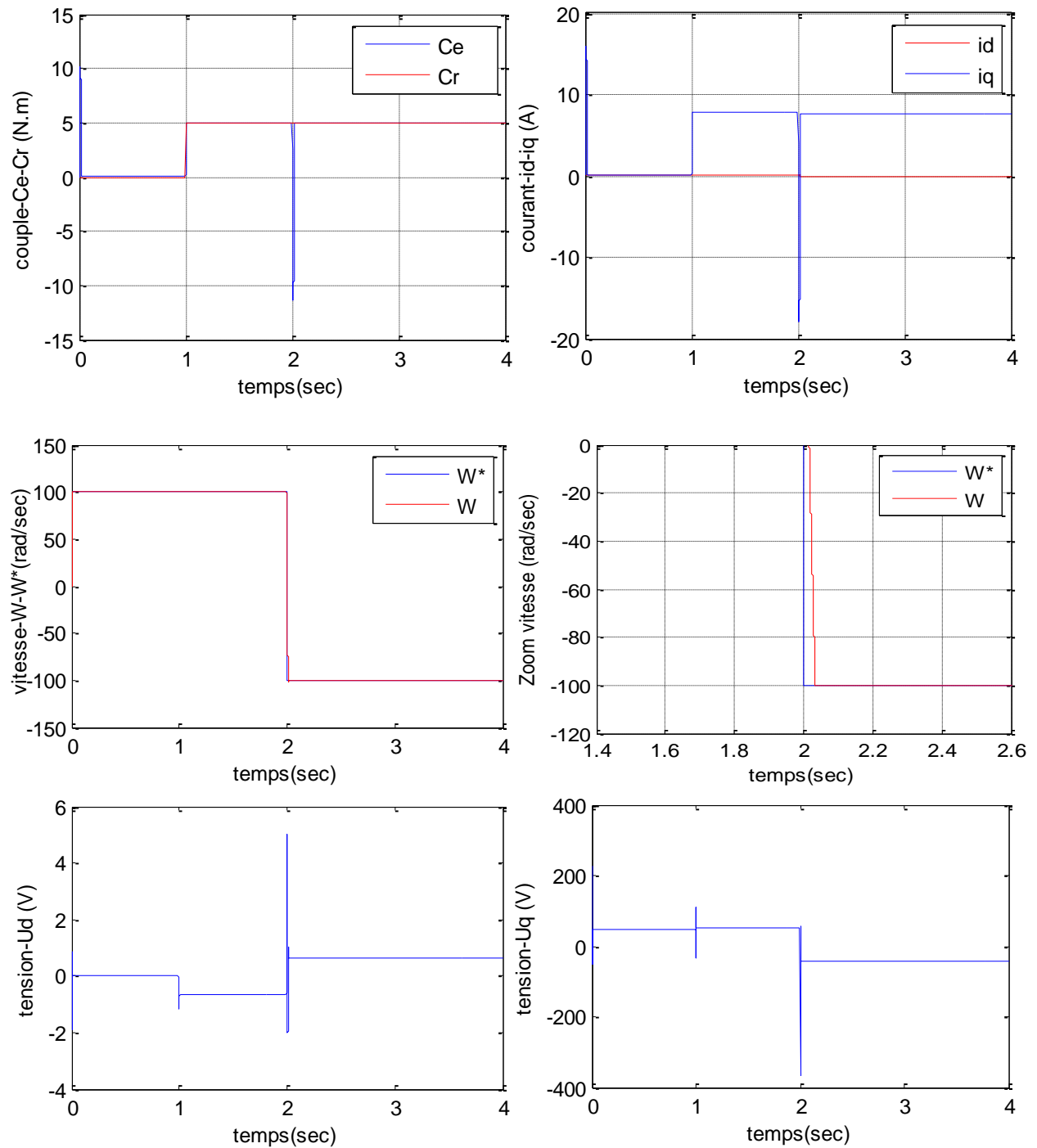
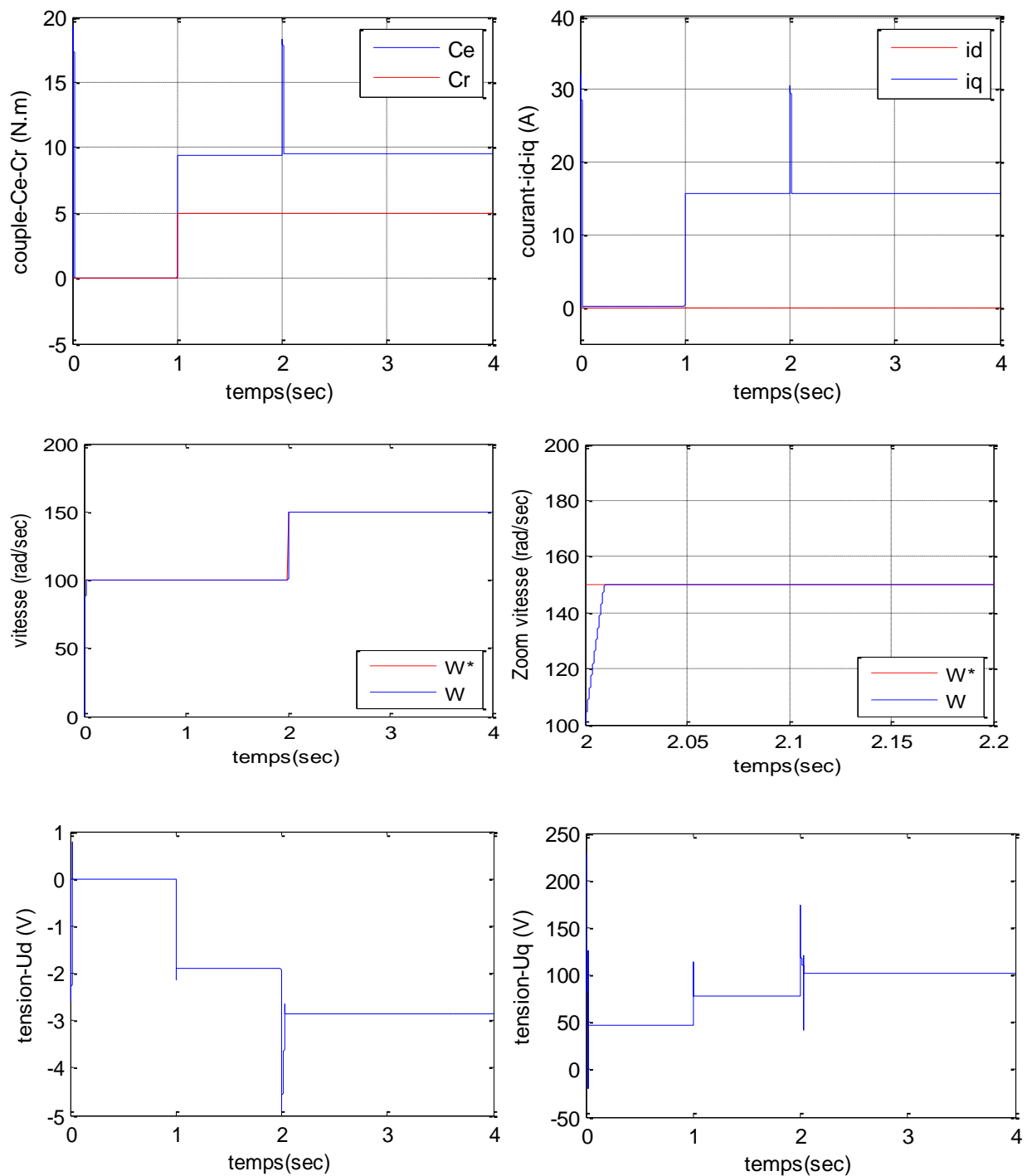


Figure (III.5.c) : Test de la commande à l'inversion de la vitesse en charge.

d) Test de la commande en charge avec augmentation de R_s :**Figure (III.5.d) :** Teste de la commande en charge avec augmentation de R_s

III.8.5. Interprétation des résultats de simulation :

Les figures précédentes représentent la vitesse, le couple et les courants de stator que i_d , i_q . A partir des différentes simulations sous MATLAB, On obtenu des bonnes performances. Avec ces valeurs des gains on a pu éliminer les perturbations d'une façon très rapide et une réduction de l'erreur statique sur la vitesse à vide et en charge.

Le test de variation de la résistance stator que montre que la vitesse, couple, et les deux courant statorique évoluent très peu ce qui confirme la robustesse de la commande (Zoom sur la vitesse).

Le test d'inversion du sens de rotation de la vitesse en charge montre que la vitesse suit sa référence dans les deux sens sans dépassements. On signalera au passage le fort couple transitoire à l'inversion du sens de rotation qui ne dure néanmoins pas trop longtemps.

On n'a pas pu montrer les variations des tensions de commande de la machine a cause des variations sur la résistance parce que sur le schéma de commande on a utilisé des limiteurs (fonction de saturation).

Schéma de bloc :

Le schéma bloc du système commande par backstepping avec l'association onduleur MSAP est représenté par la figure (III.6) suivant :

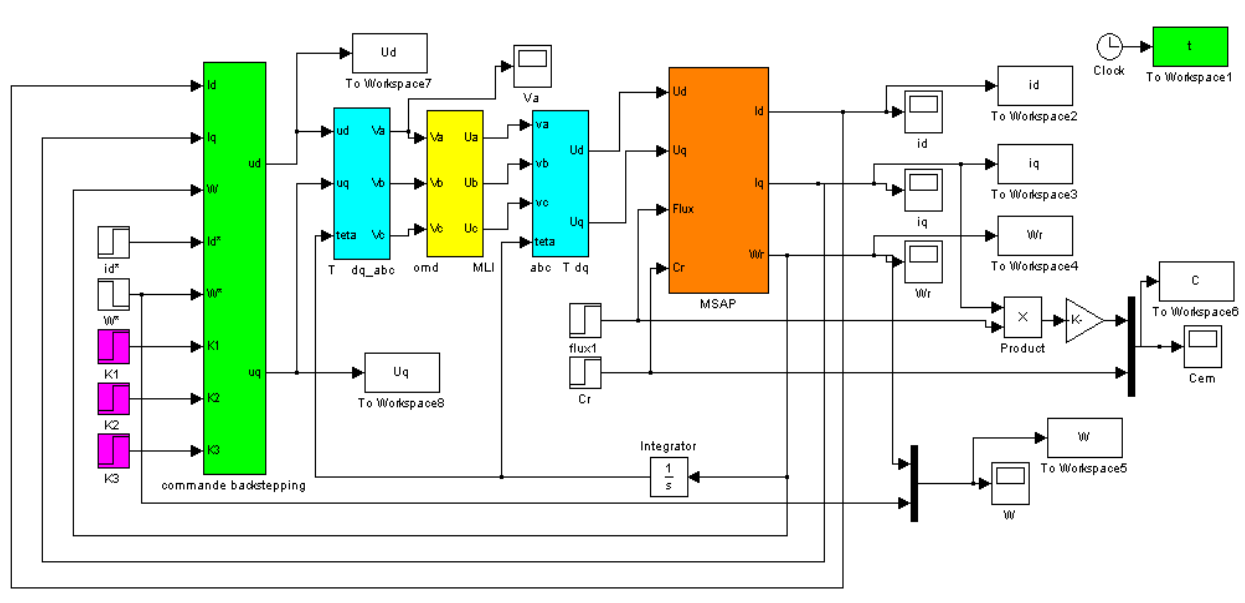


Figure (III.6) : schéma de bloc de commande backstepping de l'association onduleur-MSAP

III.8.6. Résultats de simulation de la commande par backstepping avec l'association onduleur –MSAP :

a) Test de la commande à vide :

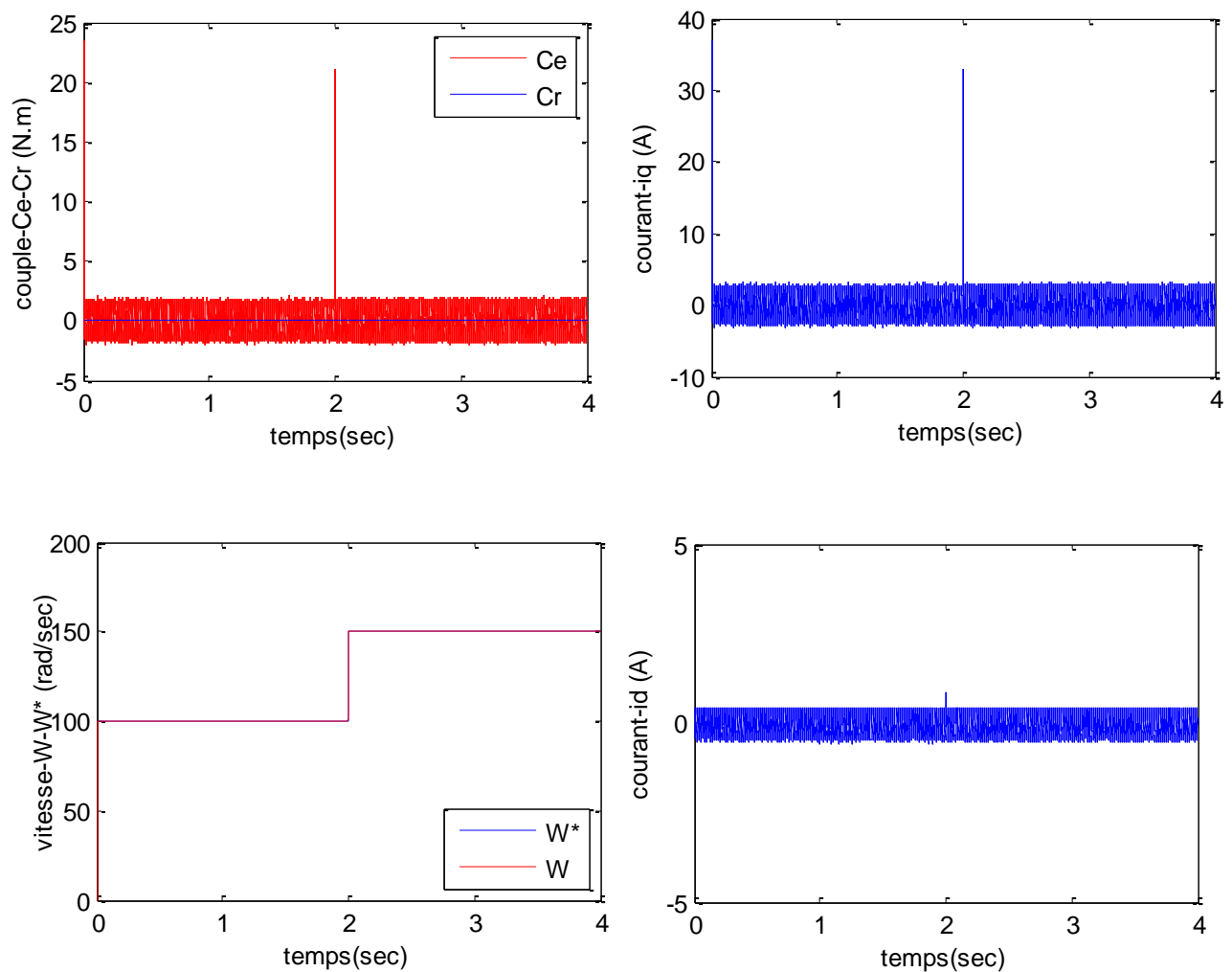
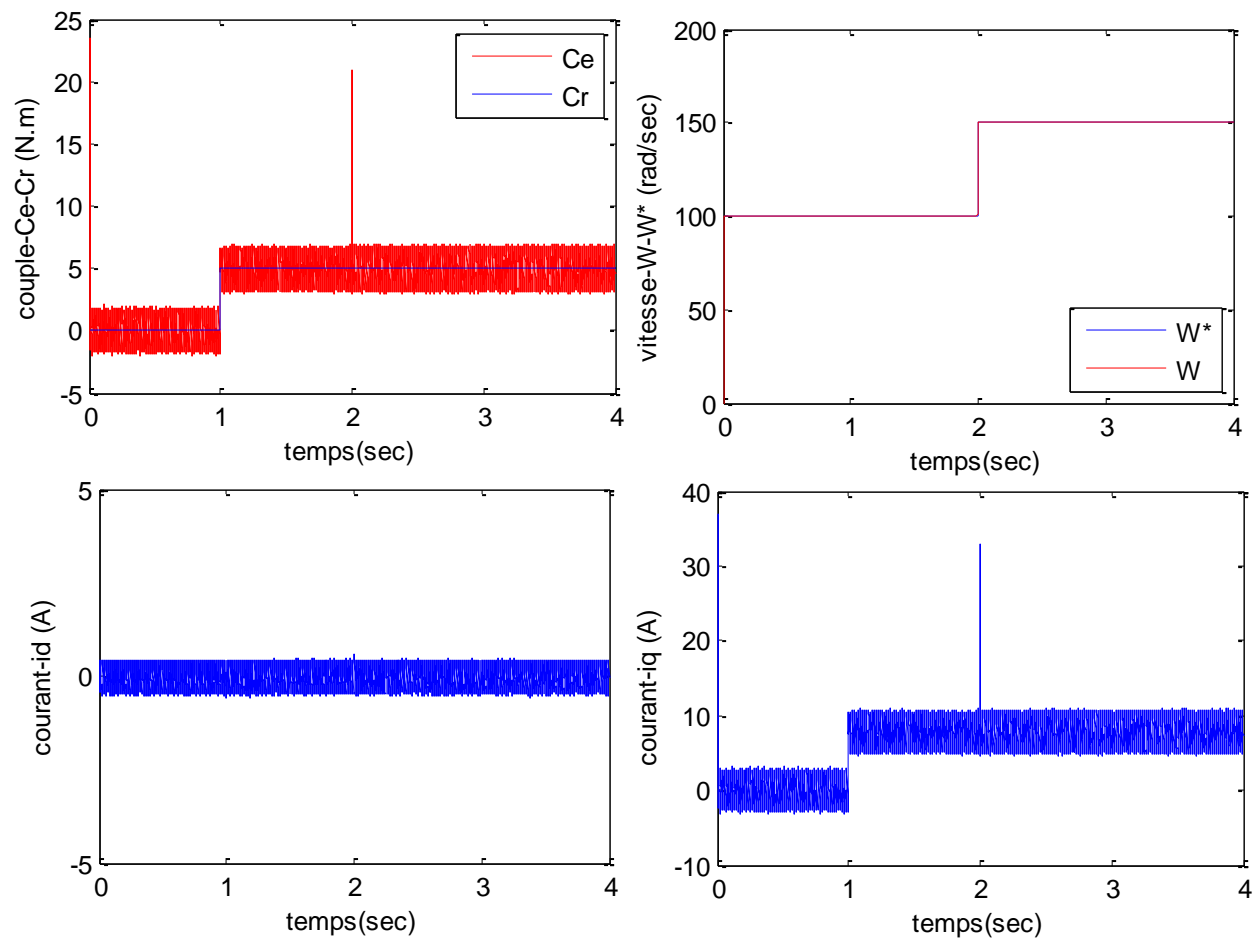
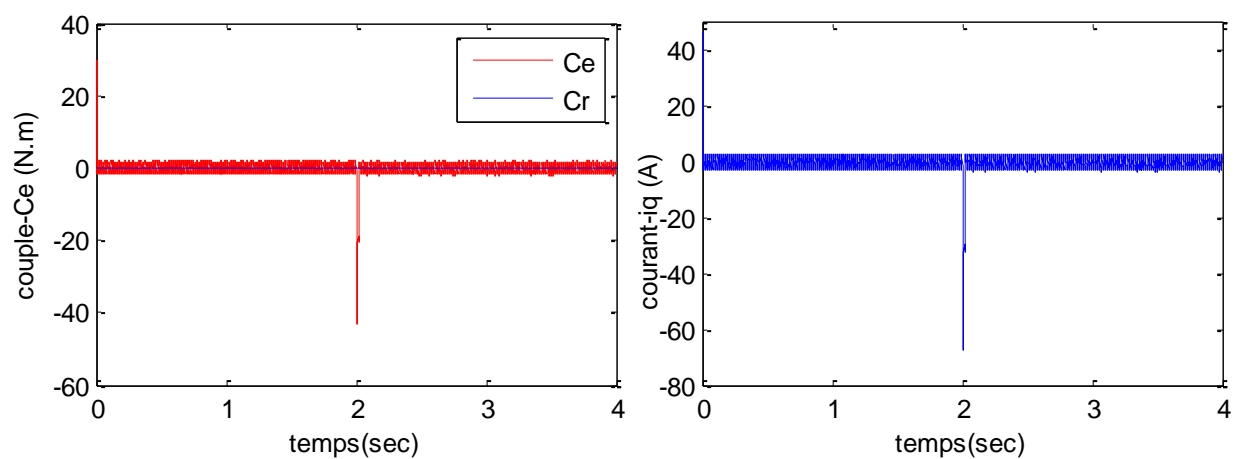


Figure (III.7.a) Test de la commande à vide

b) Test de la commande avec une charge nominal :**Figure (III.7.b)** Test de la commande avec une charge nominal**c) Test de la commande à l'inversion de la vitesse a vide :**

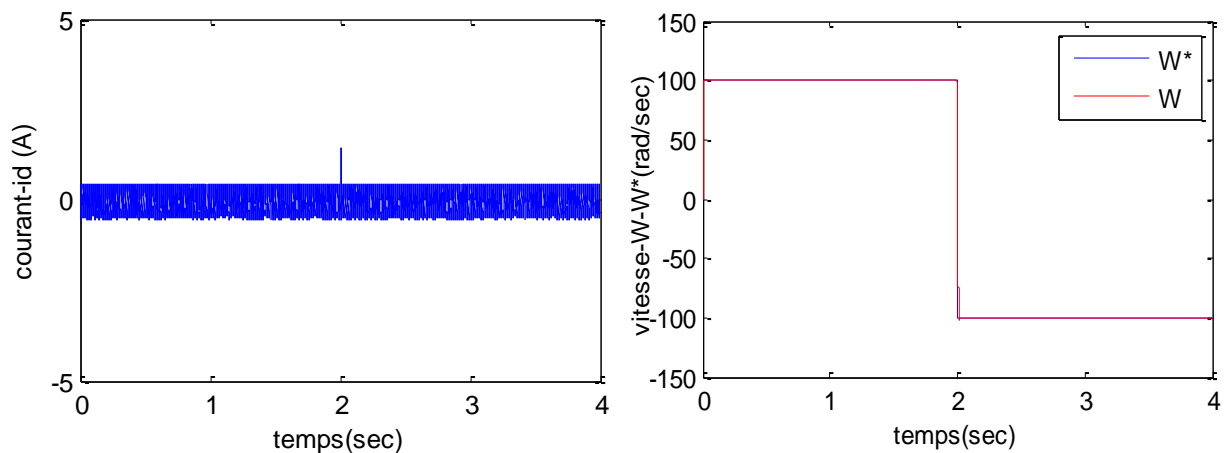


Figure (III.7.c) Test de la commande à l'inversion de la vitesse a vide.

III.8.7. interprétation de résultats de simulation:

Nous avons appliqué la commande par backstepping de l'association onduleur- MSAP. A partir des résultats obtenus après la simulation, nous remarquons que l'évolution de la vitesse des régimes transitoires est presque linéaire, puis elle stabilise au régime permanent au bout d'un temps très faible a causé du moment d'inertie très faible lui aussi.

Le couple électromagnétique présente une valeur de Crête (24 N.m) en d'émargé et se stabilise a une valeur arche nulle au régime permanent à vide, et il est de même forme que le courant iq on quadrature. Le courant id est nul. La forme de couple électromagnétique varie lorsqu' on applique une charge de (5N.m) à (t=1sec) n'ayant aucun effet sur le courant id maitrise à une valeur nulle.

Les résultats de simulation du même système à vide inversion du sens de rotation de la vitesse montrent que la vitesse suit sa référence dans les deux sens sans dépassements. On signalera au passage le fort couple transitoire à l'inversion du sens de rotation qui ne dure néanmoins pas trop longtemps.

On n'a pas pu montrer les variations des tensions de commande de la machine a cause des variations sur la résistance parce que sur le schéma de commande on a utilisé des limiteurs (fonction de saturation)

III.9. CONCLUSION :

Dans ce chapitre nous avons simulé l'ensemble (commande backstepping-MSAP) et l'ensemble (MSAP-convertisseur) commandé par la technique du backstepping.

La technique du backstepping offre un outil efficace qui permet, pour les systèmes non linéaires de tout ordre, de construire récursivement, et d'une manière systématique et directe, la loi de commande et la fonction de Lyapunov qui assurent la stabilité de la boucle.

Finalement on peut conclure que la technique du backstepping présente une meilleure robustesse par rapport aux perturbations et aux incertitudes paramétriques.